PENGGUNAAN INVERS DRAZIN UNTUK MENENTUKAN SOLUSI SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL SINGULAR LINIER DENGAN KOEFISIEN KONSTAN

SKRIPSI SARJANA MATEMATIKA

Oleh

RAFNITA SARIDEWI

06 134 054

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG

2010

ABSTRAK

Tujuan utama dari skripsi ini adalah menggunakan invers Drazin untuk menentukan solusi sistem persamaan diferensial singular linier dengan koefisien konstan. Ditunjukkan bahwa tidak semua vektor di R^n dapat berperan sebagai kondisi awal yang konsisten.

Dalam skripsi ini juga dikonstruksi bentuk himpunan kondisi awal yang konsisten agar sistem persamaan diferensial singular linier dengan koefisien konstan mempunyai solusi tunggal. Beberapa contoh disajikan untuk memperjelas hasil akhir.

Kata kunci: *Invers Drazin, persamaan diferensial singular linier, kondisi awal konsisten.*

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Diberikan suatu sistem persamaan diferensial biasa linier dengan koefisien konstan berikut ini :

$$\dot{x} + Ax = f, \quad x(0) = x_0, \tag{1.1.1}$$

dengan $x, f \in R^n$, $A \in R^{n \times n}$, dan $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

Dalam [7] dinyatakan bahwa solusi umum persamaan (1.1.1) adalah

$$x(t) = e^{-At}x_0 + \int_0^t e^{-A(t-\tau)} f(\tau) d\tau. \tag{1.1.2}$$

Persamaan (1.1.2) memperlihatkan bahwa $x(t)$ selalu tunggal untuk setiap $x_0 \in R^n$.

Sekarang, perhatikan persamaan diferensial linier dengan koefisien konstan berikut ini :

$$E\dot{x} + Ax = f, \quad x(0) = x_0, \tag{1.1.3}$$

dengan $E \in R^{n \times n}$.

Jelas bahwa jika $rank(E) = n$, maka persamaan (1.1.3) tereduksi ke bentuk (1.1.1), dan solusinya dapat ditentukan untuk setiap kondisi awal $x_0 \in R^n$. Masalah yang menarik adalah jika $rank(E) < n$, yang tentu saja invers matriks E tidak ada.

Oleh karena itu, masalah yang dibicarakan dalam skripsi ini adalah bagaimana menentukan solusi sistem (1.1.3) dengan $rank(E) < n$.

Untuk mendapatkan solusi ini, digunakan metoda invers Drazin. Sistem (1.1.3) dengan $rank(E) < n$ sering disebut sebagai sistem persamaan diferensial singular linier dengan koefisien konstan.

1.2 Perumusan Masalah

Diberikan sistem persamaan diferensial singular linier dengan koefisien konstan

$$E\dot{x} + Ax = f, \quad x(0) = x_0, \tag{1.2.1}$$

dengan $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $x, f \in R^n$, $E, A \in R^{n \times n}$, dan $rank(E) < n$.

1. Bagaimana bentuk eksplisit solusi sistem (1.2.1) ?
2. Bagaimana bentuk kondisi awal yang konsisten untuk sistem (1.2.1) sedemikian sehingga solusinya tunggal ?

1.3 Pembatasan masalah

1. Untuk menentukan solusi sistem (1.2.1), asumsikan $\det(sE + A) \neq 0$, untuk suatu $s \in \mathbb{C}$.
2. Setiap komponen vektor f diasumsikan punya turunan sampai orde q.

1.4 Tujuan Penulisan

Penulisan ini bertujuan untuk menentukan bentuk eksplisit solusi sistem (1.2.1) dengan menggunakan metoda invers Drazin dan menentukan kondisi awal yang konsisten sedemikian sehingga solusinya tunggal.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dengan menggunakan metoda invers Drazin, sistem persamaan diferensial singular linier dengan koefisien konstan, yakni

$$E\dot{\mathrm{x}} + A\mathrm{x} = \mathrm{f}, \quad \mathrm{x}(0) = \mathrm{x}_0$$

dengan $\dot{\mathrm{x}} = \dfrac{d\mathrm{x}}{dt}$, $\mathrm{x}, \mathrm{f} \in R^n$, $E, A \in R^{n \times n}$, dan $rank(E) < n$,

mempunyai solusi tunggal :

$$\mathrm{x} = e^{-\overline{E}^D \overline{A} t} \overline{E}\,\overline{E}^D \mathrm{v} + \overline{E}^D e^{-\overline{E}^D \overline{A} t} \int_a^t e^{\overline{E}^D \overline{A} \tau} \overline{f}(\tau)\, d\tau + \left(I - \overline{E}\,\overline{E}^D\right) \sum_{k=0}^{q-1} (-1)^k (\overline{E}\,\overline{A}^D)^k \overline{A}^D \overline{f}^{(k)},$$

dengan v adalah sebarang vektor berdimensi n, q indeks dari $\overline{E}$, dan a adalah konstanta sebarang.

Kondisi awal yang konsisten untuk sistem mestilah berbentuk :

$$\mathrm{x}_0 = \overline{E}\,\overline{E}^D \mathrm{x}_0 + (I - \overline{E}\,\overline{E}^D) \sum_{k=0}^{q-1} (-1)^k (\overline{E}\,\overline{A}^D)^k \overline{A}^D \overline{f}^{(k)}(0)$$

dengan $\mathrm{x}(0) = \mathrm{x}_0$ dan $a = 0$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, H. 1991. *Aljabar Linier Elementer Edisi Lima*. Erlangga. Jakarta.

[2] Boyce, W.E and R.C. Diprima. 1992. *Elementary Diffeential Equations and Boundary Value Problems*. John Wiley and Sons,Inc. New York.

[3] Campbell, L., Meyer,C.D. and J.R. Nicholas. 1976. *Applications of the Drazin Invers to Linier Systems of Differential Equations with Singular Constant Coefficients*. SIAM J. Appl. Math. vol.31 no.3 pp: 411-425.

[4] Cullen, C.G. 1991. *Linier Algebra and Differential Equations*. Pws-Kent Publising Company. Boston.

[5] Finizio,N dan G.Ladas. 1988. *Persamaan Differensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Edisi Kedua. Erlangga. Jakarta.

[6] Gantmacher, F.R. 2000. *The Theory of Matrices*. Vol.1. AMS Chelsea Publishing. Rhode Island.

[7] Kaczorek.T. 1992. *Linier Control System*. Vol.1. Research Studies Press LTD. England.