

NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN DARI KOMPOSISI
TRANSEFORMASI LINIER ROTASI DAN REFLEKSI DI \mathbb{R}^2



Oleh

DENI AFRI YANDI

03134003



JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG

2009



ABSTRAK

Transformasi linier $T_2 \circ T_1$ adalah kombinasi transformasi dari $T_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ yang didefinisikan sebagai rotasi dari \mathbb{R}^2 melalui sudut sebesar θ , dengan θ adalah bilangan tetap dengan $T_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ yang didefinisikan sebagai refleksi dari \mathbb{R}^2 terhadap garis $y = mx$ yang melalui titik asal 0 dengan m adalah *gradien*, merupakan transformasi linier satu-satu dan pada serta mempunyai nilai-nilai eigen dan vektor eigen tertentu.

Kata kunci : *transformasi linier, satu-satu, pada, rotasi, refleksi, nilai eigen, vektor eigen*

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Diketahui secara luas bahwa pemetaan (transformasi) linier mempunyai banyak peranan dalam berbagai cabang ilmu matematika, terutama dalam bidang aljabar. Diketahui juga bahwa \mathfrak{R}^2 adalah himpunan pasangan terurut bilangan riil rangkap dua, ditulis $\mathfrak{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in \mathfrak{R}, x_2 \in \mathfrak{R}\}$ dengan (x_1, x_2) menyatakan suatu titik di bidang. Karena suatu vektor $\vec{x} \in \mathfrak{R}^2$ yang bertitik awal di O dapat pula dinyatakan oleh (x_1, x_2) dengan (x_1, x_2) adalah titik ujungnya, maka (x_1, x_2) dapat dipandang sebagai suatu titik atau suatu vektor. Jika (x_1, x_2) dipandang sebagai suatu vektor \vec{x} , maka dapat ditulis $\vec{x} = (x_1, x_2)$. Dengan demikian \mathfrak{R}^2 dapat pula dinyatakan sebagai himpunan semua vektor (x_1, x_2) .

Sebelumnya pernah dibahas bahwa suatu rotasi dari \mathfrak{R}^2 terhadap suatu sudut sebesar θ , dengan θ bilangan tetap, dinyatakan sebagai suatu pemetaan linier $T: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ yang memiliki nilai eigen dan vektor eigen tertentu yang dirumuskan dengan :

$$T(x_1, x_2) = (x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta, x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta), \forall (x_1, x_2) \in \mathfrak{R}^2$$

Bersamaan dengan itu juga dibahas bahwa refleksi \mathfrak{R}^2 terhadap garis $y = mx$ yang melalui titik asal O dengan gradien m adalah suatu pemetaan linier $T: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ yang satu-satu dan pada, yang dirumuskan dengan :

$$T(x_1, x_2) = (x_1 \cos 2\theta + x_2 \sin 2\theta, x_1 \sin 2\theta - x_2 \cos 2\theta), \forall (x_1, x_2) \in \mathfrak{R}^2$$

1.2. Rumusan Masalah

Berangkat dari latar belakang tersebut, maka timbul pertanyaan bagaimana hasil dan sifat pemetaan bila hasil rotasi dari suatu titik di \mathbb{R}^2 melalui sudut sebesar θ (dengan θ bilangan tetap) direfleksikan terhadap garis $y = mx$ yang melalui titik asal O yang bergradien m . Atau dengan kata lain bagaimana hasil dan sifat dari komposisi pemetaan Rotasi dan Refleksi ini, terutama tentang nilai eigen dan vektor eigen-nya.

1.3. Batasan Masalah

Pada skripsi ini yang menjadi pokok pembahasan adalah hasil dan sifat dari gabungan (komposisi) transformasi linier Rotasi dan Refleksi untuk suatu titik sembarang yang berada di \mathbb{R}^2 .

1.4. Tujuan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah untuk mengetahui sifat pemetaan rotasi dari \mathbb{R}^2 melalui sudut sebesar θ , dengan θ adalah bilangan tetap yang direfleksikan terhadap garis $y = mx$ yang melalui titik asal O dengan gradien m .

1.5. Sistematika Penulisan

Bab I berisi tentang pendahuluan yang terdiri atas latar belakang pemilihan tema, rumusan dan batasan masalah yang menjadi topik utama serta tujuan yang diinginkan dalam penulisan skripsi ini.

Bab II berisi tentang teori-teori yang melandasi dan mendukung materi yang akan dibahas dalam skripsi ini. Diantaranya adalah beberapa konsep tentang vektor, transformasi linier, rotasi, refleksi, nilai eigen dan vektor eigen.

BAB IV

KESIMPULAN

Rotasi dari \mathbb{R}^2 melalui sudut sebesar θ yang direfleksikan terhadap garis $y = mx$ adalah kombinasi transformasi linier rotasi dan refleksi yang bersifat satu-satu dan pada yang dirumuskan dengan persamaan :

$$(T_2 \circ T_1)(x_1, x_2) = (x_1 \cos(\theta - 2\alpha) + x_2 \sin(\theta - 2\alpha), x_1 \sin(\theta - 2\alpha) - x_2 \cos(\theta - 2\alpha))$$

dimana θ, α bilangan tetap dan $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Transformasi yang didefinisikan dengan $T_2 \circ T_1$ ini, dengan T_1 : rotasi dengan sudut sebesar θ , (θ bilangan tetap) dan T_2 : refleksi terhadap garis $y = mx$, m gradien mempunyai nilai-nilai eigen yaitu $\lambda = -1$ dan $\lambda = 1$ untuk setiap nilai θ, α yang diberikan, dengan vektor-vektor eigen yang bersesuaian adalah :

Untuk $\lambda = -1$, diperoleh vektor eigen dari $T_2 \circ T_1$ adalah :

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{\sin(\theta - 2\alpha)}{1 + \cos(\theta - 2\alpha)}\right)s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -\left(\frac{\sin(\theta - 2\alpha)}{1 + \cos(\theta - 2\alpha)}\right) \\ 1 \end{bmatrix}, s \neq 0$$

Dan Untuk $\lambda = 1$, diperoleh vektor eigen dari $T_2 \circ T_1$ adalah :

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{-\sin(\theta - 2\alpha)}{1 - \cos(\theta - 2\alpha)}\right)t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \left(\frac{-\sin(\theta - 2\alpha)}{1 - \cos(\theta - 2\alpha)}\right) \\ 1 \end{bmatrix}, t \neq 0$$

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Anton, Howard. 2000. *Dasar-dasar Aljabar Linier Edisi Ketujuh*. Interaksa : Batam.
- [2] Anton, Howard dan Pantur Silaban. 1985. *Aljabar Linier Elementer Edisi Ketiga*. Erlangga : Jakarta.
- [3] Arifin, Ahmad. 2001. *Aljabar Linier Edisi Kedua*. ITB : Bandung.
- [4] Cullen, Charles. G. 1988. *Aljabar Linier Dengan Penerapannya*. PT. Gramedia Pustaka Utama : Jakarta.
- [5] Gantmacher, F. R. 2000. *The Theory of Matrices*. AMS Chelsea Publishing : Providence, Rhode Island.
- [6] Jacob, Bill. 1990. *Linier Algebra*. W. H. Freeman and Company : New York.
- [7] Hutahaean, E. Sumarsono. 1982. *Matematika 3*. ITB : Bandung.
- [8] Leon, Steven J. 2001. *Aljabar Linier dan Aplikasinya Edisi 5*. Alib bahasa oleh Alit Bondan. Erlangga : Jakarta

