# PENDUGAAN MODEL LINIER DENGAN MENGGUNAKAN MATRIKS KEBALIKAN UMUM *(GENERALIZED INVERSE)*

SKRIPSI SARJANA MATEMATIKA

OLEH :

**GUSTICA ELVIRA**
04 934 009



JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS ANDALAS

PADANG

2009

## ABSTRAK

Misalkan $\mathbf{Y} = X\boldsymbol{\beta} + \varepsilon$ adalah model linier, dimana $\mathbf{Y}$ adalah vektor dari $n$ pengamatan, $\boldsymbol{\beta}$ adalah vektor dari parameter, $\varepsilon$ adalah komponen galat atau sisaan dan X adalah model matriks $n \ x \ p$ dengan pangkat (rank) $r < p$. Dengan mengasumsikan $X^TX$ adalah matriks berpangkat tidak penuh, maka penduga dari persamaan normal $X^TX\mathbf{b} = X^T\mathbf{Y}$ bersifat tidak unik, sehingga penduga bagi persamaan normal dapat dicari dengan menggunakan matriks kebalikan umum(*generalized inverse*).

Penduga takbias terbaik bagi $\mathbf{t}^T\boldsymbol{\beta}$ dapat diperoleh bila $\mathbf{t}^T\boldsymbol{\beta}$ yang dapat diduga menghasilkan penduga yang sama untuk setiap solusi sistem $X^TX)\mathbf{z} = \mathbf{t}$. Selanjutnya, penduga tak bias terbaik bagi $\mathbf{t}^T\boldsymbol{\beta}$ adalah $\mathbf{t}^T\mathbf{b}$ dimana $\mathbf{b}$ adalah solusi untuk persamaan normal.



**Kata kunci** ; matriks, pangkat (rank) matriks, model linier, matriks kebalikan umum (*generalized inverse*), penduga parameter,

BAB I

# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Model statistika linier memainkan peranan penting dalam teori statistik. Teori model linier merupakan teori dasar untuk berbagai teknik statistika yang penting seperti analisis ragam, analisis peragam, rancangan percobaan dan banyak lainnya.

Diasumsikan bentuk umum dari model linier adalah :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad \text{..........................(1.1.1)}$$

dalam bentuk matriks model linier (1.1.1) dapat dituliskan :

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & \cdots & X_{1p} \\ 1 & X_{21} & \cdots & X_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & \cdots & X_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \qquad \text{..........................(1.1.2)}$$

dimana **Y** adalah vektor dari n pengamatan, **β** adalah vektor dari parameter, $\varepsilon$ adalah komponen galat atau sisaan dan *X* adalah model matriks. Asumsikan matriks $X^TX$ adalah matriks *pxp* dengan pangkat (rank) *p* dan nonsingular. Penduga takbias terbaik bagi **β** adalah **b**, dimana dapat ditulis sebagai berikut :

$$\mathbf{b} = (X^TX)^{-1}X^T\mathbf{Y}$$

Namun, pada kasus lain ditemui model linier $\mathbf{Y} = X\boldsymbol{\beta} + \varepsilon$, dimana X adalah matriks *n x p* dengan pangkat r < p. Pengertian ini jelas bahwa $X^TX$ berpangkat tidak penuh dan singular, maka penduga bagi **β** tidak unik sehingga nilai dugaan parameternya dapat dicari dengan menggunakan matriks kebalikan umum (*generalized inverse*).

Berdasarkan uraian di atas penulis akan membahas bagaimana menentukan nilai dugaan parameter dari model linier $\mathbf{Y} = X\beta + \varepsilon$ dengan persamaan normal $X^TX\mathbf{b} = X^T\mathbf{Y}$, dimana $X^TX$ adalah matriks singular .

## 1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas maka persoalan yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah bagaimana menentukan nilai dugaan parameter dari persamaan normal $X^TX\mathbf{b} = X^T\mathbf{Y}$, dimana $X^TX$ adalah matriks singular.

## 1.3 Pembatasan Masalah

Pada tulisan ini masalah dibatasi dengan mencari nilai dugaan parameter dari persamaan normal $X^TX\mathbf{b} = X^T\mathbf{Y}$, dimana $X^TX$ adalah matriks singular

## 1.4 Tujuan Penulisan

Adapun tujuan dari penulisan ini adalah membahas penggunaan matriks kebalikan umum (*generalized inverse*) dalam menentukan nilai dugaan parameter dari persamaan normal $X^TX\mathbf{b} = X^T\mathbf{Y}$, dimana $X^TX$ adalah matriks singular.

## 1.5. Sistematika Penulisan

Adapun sistematika penulisan tugas akhir ini adalah :

BAB I : Pendahuluan

Bab ini berisi latar belakang, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan.

# BAB IV

# PENUTUP

## 4.1 Kesimpulan

1. Untuk mendapatkan nilai dugaan dari model linier $\mathbf{Y} = X\beta + \varepsilon$ dengan persamaan normal $X^TX\mathbf{b} = X^T\mathbf{Y}$ dan $X^TX$ matriks berpangkat tidak penuh, adalah dengan menggunakan matriks kebalikan umum (*generalized inverse*). Matriks kebalikan umum dari matriks $X^TX$ adalah sembarang matriks $(X^TX)^G$ yang memenuhi persamaan $X^TX(X^TX)^GX^TX = X^TX$. Karena matriks kebalikan umum tidak unik kecuali pada $X^TX$ yang non-singular, maka pada kasus ini tidak diperoleh solusi yang unik untuk sistem persamaan tersebut. Alasannya adalah dengan memilih matriks kebalikan umum yang lain maka akan diperoleh solusi yang berbeda pula. Sehingga pada model berpangkat tidak penuh vektor $\boldsymbol{\beta}$ tidak bisa diduga secara tunggal (unik). Karena alasan ini, model statistik berpangkat tidak penuh memusatkan perhatian bukanlah pada $\boldsymbol{\beta}$ melainkan pada fungsi linier $\boldsymbol{\beta}$, yaitu dalam bentuk $\mathbf{t}^T\boldsymbol{\beta}$ dimana $\mathbf{t}^T$ adalah vektor bilangan riil. Secara umum penduga untuk $\mathbf{t}^T\boldsymbol{\beta}$ adalah $\mathbf{t}^T\mathbf{b}$ dimana $\mathbf{b}$ adalah solusi dari persamaan normal.

2. Penduga takbias bagi $\sigma^2$ adalah $s^2$

   Dalam model berpangkat tidak penuh, $s^2$ diberikan sebagai berikut :

$$s^2 = \frac{SS_{res}}{n-r}$$

$$SS_{res} = \mathbf{Y}^T[I - X(X^TX)^G X^T]\mathbf{Y}$$

dimana $(X^TX)^G$ dalah matriks kebalikan umum dari $X^TX$

## DAFTAR PUSTAKA


[1] Anton, Howard. 1987. *Aljabar Linier elementer*.Edisi kel-5.Erlangga: Jakarta

[2] Cambell. H. G 1980. *Linear Algebra with Aplication, second edition*. PrenticeHall. Inc, Englewood Chifts, New Jersey

[3] Goldberg, Jack. 1991. *Matric Theory with Application* MoGraw-Hill, Inc. USA

[4] Jacob, Bill 1990. *Linear Algebra*. W.H. Freeman and Company. USA

[5] Leon, S.J. *Aljabar Linear dan Aplikasinya ( terjemahan)*. fifth edition Erlangga. Jakarta.

[6] Noble, Ben and Daniel, J.W. 1988. *Applied Linear Algebra 3th edition*. Prentice – Hall New Jersey.

[7] Searle,S.R, *Linear Models*, John Wiley & Sons, Inc : New York

[8] Strang, Gilbert. 1993. *Introducetion to Linear Algebra*. Wellesley – Canbridge Press. United States of America.

[9] Myers, Reymond H. *A First Course in the Theory of Linear Statistic Models*. PWS-kent Publishing Company. Boston.

[10] Usman, Mustofa, Ph. D. Dan Warsono, Ph. D . *Bahan Pelatihan Peningktan Penguasaan Teori Statistika dan Modl Linier*. Universitas Lampung