

**MEMPERUMUM METODE JACOBI UNTUK  
MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN LINIER**

**SKRIPSI SARJANA MATEMATIKA**

**Oleh**

**FAJAR WISGA PERMANA**  
**05134035**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS ANDALAS**

**PADANG**

**2010**

## ABSTRAK

Metode Jacobi adalah salah satu metode iterasi yang dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier  $Ax = b$  dengan syarat matriks  $A$  yang bersifat dominan diagonal secara tepat. Dalam penelitian ini metode Jacobi dikembangkan menjadi metode Jacobi Diperumum, yaitu dengan memperumum matriks-matriks yang terlibat dalam persamaan metode Jacobi menurut suatu parameter. Berdasarkan alur analisis konvergensi metode Jacobi, dapat dibuktikan bahwa metode Jacobi Diperumum juga selalu konvergen ke solusi sejati sistem persamaan linier  $Ax = b$ .

Kata Kunci : *Sistem Persamaan Linier, Dominan Diagonal Secara Tepat, Metode Jacobi, Metode Jacobi Diperumum.*

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Metode iterasi dapat digunakan sebagai alternatif metode analitik untuk menyelesaikan sistem persamaan linier yang berbentuk  $Ax = b$  dengan  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  dan  $x, b \in \mathbb{R}^n$ . Dalam menyelesaikan suatu sistem persamaan linier metode iterasi bekerja dengan membangkitkan barisan vektor

$$(x^{(k)}), k = 1, 2, \dots$$

yang konvergen ke solusi sejati (*exact solution*) dari sistem persamaan linier tersebut.

Hal yang dinilai dari suatu metode iterasi adalah seberapa cepat barisan vektor  $(x^{(k)})$  konvergen ke solusi sejati  $x = A^{-1}b$ . Dalam konteks ini, metode Jacobi merupakan metode iterasi yang konvergensinya paling lambat jika dibandingkan dengan metode-metode iterasi lainnya seperti metode Gauss-Seidel dan metode Relaksasi Berurutan (*Successive Over Relaxation*) untuk terkaan awal yang sama [1]. Akan sangat baik jika metode Jacobi dianalisis secara lebih mendalam untuk memperlihatkan bahwa konvergensi metode Jacobi dapat dipercepat dengan proses tertentu. Dalam skripsi ini ditunjukkan bahwa metode Jacobi merupakan salah satu bentuk khusus dari suatu metode iterasi yang lebih umum yang kemudian disebut metode Jacobi Diperumum. Metode Jacobi Diperumum diperoleh dengan memperumum matriks-matriks yang terlibat dalam persamaan iterasi metode Jacobi menurut suatu parameter. Dengan pemilihan nilai parameter tertentu, akan diperoleh metode-metode iterasi yang bentuknya analog

dengan metode Jacobi namun memiliki konvergensi yang lebih cepat daripada metode Jacobi.

## 1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, yang menjadi masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana menganalisis konvergensi metode Jacobi, memperumum metode Jacobi dan menganalisis konvergensi metode Jacobi diperumum dengan mengikuti analisis konvergensi metode Jacobi.

## 1.3 Pembatasan Masalah

Masalah dibatasi pada sistem persamaan linier  $Ax = b$  dengan  $A$  bersifat dominan diagonal secara tepat (*strictly diagonally dominant*).

## 1.4 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk memperumum metode Jacobi agar dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier yang dapat diselesaikan dengan metode Jacobi.

## 1.5 Sistematika Penulisan

Skripsi ini ditulis dalam 4 bab, yaitu:

- Bab I :Pendahuluan, berisi latar belakang masalah, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penelitian, dan sistematika penulisan.
- Bab II :Landasan teori, memuat tentang beberapa definisi dan teorema aljabar linier dan analisis riil yang diperlukan dalam pembahasan.

## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1 Kesimpulan

Dari penelitian ini diperoleh beberapa kesimpulan. Misal diberikan sistem persamaan linier  $Ax = b$  dengan  $A$  bersifat dominan diagonal secara tepat maka

1. Barisan vektor yang dibangkitkan oleh iterasi metode Jacobi konvergen ke vektor  $x$  untuk sebarang terkaan awal asalkan jari-jari spektral matriks iterasi metode Jacobi lebih kecil dari 1 atau terpilih terkaan awal yang sama dengan solusi analitik SPL.
2. Matriks-matriks yang terlibat dalam persamaan iterasi metode Jacobi dapat diperumum menurut suatu parameter. Metode yang direpresentasikan oleh persamaan iterasi yang melibatkan matriks-matriks diperumum tersebut kemudian dikenalkan sebagai metode Jacobi diperumum.
3. Barisan vektor yang dibangkitkan oleh iterasi metode Jacobi diperumum juga konvergen ke vektor  $x$  untuk sebarang terkaan awal asalkan jari-jari spektral metode Jacobi diperumum lebih kecil dari 1. Contoh yang diberikan menunjukkan bahwa, dengan memilih parameter yang sesuai dengan persyaratan, metode Jacobi diperumum lebih efisien daripada metode Jacobi karena lebih cepat konvergen ke solusi sistem persamaan linier.

#### 4.2 Saran

Penulis menyarankan pembaca untuk mempelajari metode-metode iterasi lainnya seperti metode Gauss-Seidel dan Relaksasi Berurutan dan menyelidiki

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Golub, G.H. 1989. *Matrix Computation*. The John Hopkins University Press, London
- [2] Baker, R.C. 1991. *Linear Algebra*. Rinton Press, New Jersey
- [3] Flechter, P., H. Hoyle, dan Patty. 1991. *Foundation of Discrete Mathematics*. PWS-KENT Publishing Company, Boston
- [4] Matthews, K.R. 1988. *Elementary Linear Algebra*. 2<sup>nd</sup> online edition. University of Queensland
- [5] Ambrosio, A. 2005. Properties of diagonally dominant matrix. <http://planetmath.org/encyclopedia/PropertiesOfDiagonallyDominantMatrix.html>, 23 November 2009
- [6] Bagnara, R. 1995. A unified proof for the convergence of jacobi and gauss-seidel methods. *Soc. for Industrial and App. Math.* Vol. 37(1): 93-97
- [7] Hager, W.W. 1988. *Applied Numerical Linear Algebra*. Prentice Hall, New Jersey
- [8] Howard Anton. 1991. *Aljabar Linier Elementer*. Erlangga, Jakarta
- [9] Bartle, R.G., D.R. Sherbert. 1994. *Introduction to Real Analysis*. Second Edition. John Willey & Sons, Singapore
- [10] Horn, R.A dan C.R. Johnson. 1985. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge