FUNGSI BESSEL
DAN SIFAT ORTOGONALNYA

SKRIPSI SARJANA MATEMATIKA

Oleh

HASANAH FEBRINAWATI R
01134012

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG
2007

ABSTRAK

Persamaan Bessel adalah salah satu persamaan diferensial yang penting di dalam matematika terapan. Pada tulisan ini akan diperlihatkan bentuk Persamaan Bessel dan solusi dari Persamaan Bessel yang disebut juga dengan Fungsi-fungsi Bessel serta pembuktian dari sifat ortogonal Fungsi Bessel tersebut.

Kata kunci : *Persamaan diferensial, Persamaan Bessel, Fungsi Bessel, Ortogonal Fungsi Bessel*

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persoalan Nilai Batas tidak hanya terbatas pada ruang dimensi satu, waktu pada dimensi satu, atau permasalahan *steady state*(keadaan tetap) pada koordinat kartesius saja. Banyak persoalan nilai batas yang terdapat pada ruang berdimensi $n, n \geq 2$ yang memang teraplikasi pada ilmu fisika. Salah satunya ketika kita menyelesaikan persoalan nilai batas pada benda yang berbentuk lingkaran. Hal itu bisa diselesaikan dengan menggunakan persamaan diferensial umum yang disebut sebagai Persamaan Bessel yang solusinya disebut Fungsi Bessel.

Persamaan diferensial Bessel ini adalah salah satu persamaan diferensial paling penting di dalam matematika terapan. Persamaan ini ditemukan pada berbagai masalah tentang vibrasi, medan elektronik, induksi kalor, dan lain sebagainya. Terutama bila masalah itu menunjukkan kesetangkupan silindris, seperti pada contoh kasus dalam tulisan ini [4].

Hal inilah yang mendasari penulis untuk mengetahui lebih jauh tentang Persamaan Bessel dan solusi Persamaan Bessel yang disebut juga dengan Fungsi Bessel serta sifat ortogonal Fungsi Bessel yang mempengaruhinya.

1.2 Pembatasan Masalah

Pada tulisan ini akan dimulai dengan pengenalan bentuk umum Persamaan Bessel yang akan dilanjutkan dengan pembahasan mengenai Fungsi-

fungsi Bessel serta sifat ortogonal Fungsi Bessel tersebut yang akan diperlihatkan pada contoh kasus.

1.3 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan ini adalah untuk mengetahui Persamaan Bessel dan solusi dari Persamaan Bessel yang disebut juga dengan Fungsi-fungsi Bessel serta sifat ortogonal Fungsi Bessel.

1.4 Sistematika Penulisan

Tugas Akhir ini terdiri dari beberapa bab, yakni Bab I yang berisi tentang Pendahuluan yang berupa latar belakang permasalahan, pembatasan masalah, tujuan penelitian dan sistematika penulisan. Bab II berisi Landasan Teori. Pada Bab III berisi Pembahasan mengenai Persamaan Bessel. Bab IV berisi Kesimpulan sebagai penutup dari tulisan ini.

BAB IV

KESIMPULAN

Persamaan Bessel banyak ditemukan dalam masalah-masalah matematika terapan, masalah fisika dan rekayasa. Untuk itu perlu dikenal pembuktian dan karakteristik dari persamaan Bessel tersebut. Bentuk umum persamaan Bessel yang dikenal yaitu

$$x^2\, y''(x) + xy'(x) + (x^2 - v^2)\; y(x) = 0$$

atau

$$r^2 R''(r) + rR'(r) + \left(\lambda^2 r^2 - \mu^2\right) R(r) = 0$$

Solusi dari persamaan Bessel disebut juga dengan Fungsi Bessel, ada beberapa jenis fungsi Bessel yaitu :

1.Fungsi Bessel Jenis I orde μ

$$J_\mu(\lambda r) = \left(\frac{\lambda r}{2}\right)^\mu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(\mu+m)!}\left(\frac{\lambda r}{2}\right)^{2m}$$

2.Fungsi Bessel $J_v(\lambda r)$ untuk $v \geq 0$, Fungsi Gamma

$$J_v(\lambda r) = (\lambda r)^v \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\lambda r)^{2m}}{2^{2m+v}\, m!\Gamma(v+m+1)}$$

Solusi J_{-v} bagi persamaan Bessel :

$$J_{-v}(\lambda r) = (\lambda r)^{-v} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\lambda r)^{2m}}{2^{2m-v}\, m!\Gamma(v-m+1)}$$

3.Fungsi Bessel Jenis II μ =0, $Y_0(\lambda r)$

$$Y_0(\lambda r) = \frac{2}{\pi}[J_0(\lambda r)(\ln(\frac{\lambda r}{2}) + \gamma) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} h_m}{2^{2m}(m!)^2}(\lambda r)^{2m}]$$

Fungsi Bessel Jenis Kedua $Y_\mu(\lambda r)$

Jika $v = \mu = 1,2,...$

a. $Y_v(\lambda r) = \dfrac{1}{\sin v\pi}[J_v(\lambda r)\cos v\pi - J_{-v}(\lambda r)]$

b. $Y_\mu(\lambda r) = \lim\limits_{v \to \mu} Y_v(\lambda r)$

Fungsi ini dikenal sebagai fungsi Bessel jenis kedua orde v

4.Solusi Umum Persamaan Bessel

$$R(r) = AJ_\mu(\lambda r) + BY_\mu(\lambda r)$$

Pada contoh kasus, mencari persamaan getaran pada dimensi dua yang berbentuk $(r\phi'(r))' + \lambda^2 r\phi(r) = 0$, dengan $r = r, \phi = R, \mu = 0, \lambda = \lambda$.

Dengan menggunakan persamaan Bessel dan sifat ortogonalnya maka diperoleh persamaan getaran selaput lingkaran pada dimensi dua yaitu :

$$v(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0(\lambda_n r)[\frac{1}{I_n}\int_0^a f(r)J_0(\lambda_n r)rdr.\cos(\lambda_n ct) + \frac{1}{\lambda_n c I_n}\int_0^a g(r)J_0(\lambda_n r)rdr\sin(\lambda_n ct)]$$

DAFTAR PUSTAKA

[1] Brown, James Ward, Ruel V.Churchill. 2001. *Fourier Series and Boundary Value Problem.* Edisi keenam, Singapura

[2] Finizio,N, G. Ladas. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa Dengan Penerapan Modern.* Edisi kedua. Penerbit Erlangga, Jakarta

[3] Humi, Mayer, William B. Miller. 1992. *Boundary Value Problems and Partial Differential Equations*, Boston

[4] Kreyszig, Erwin. 1993. *Matematika Teknik Lanjutan* Edisi keenam Buku 1. PT. Gramedia Pustaka Utama, Jakarta

[5] Kreyszig, Erwin. 1993. *Advanced Engineering Mathematics seventh edition.* John willey&sons, Singapura

[6] L.Powers, David. 1999. *Boundary Value Problem Fourth Edition.* Clarkson University

[7] Manougian, Manoug N, Robert A Northcutt. 1973. *Ordinary Differential Equations An Introduction.* Columbus, Ohio