PENGGUNAAN RESIDU KUTUB DALAM MENYELESAIKAN INTEGRAL FUNGSI REAL

SKRIPSI SARJANA MATEMATIKA

Oleh

YESI NOFRIYANTI
01134011

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS
PADANG
2006

ABSTRAK

Jika fungsi $f(z)$ analitik pada dan di dalam lintasan tertutup sederhana C yang berorientasi positif, kecuali pada berhingga banyaknya titik singular $z_1, z_2, \cdots, z_k$ di bagian dalam C, maka

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z)$$

metode pengintegralan kompleks ini, dikenal dengan metode pengintegralan residu yang menghasilkan suatu cara sederhana namun elegan untuk menghitung berbagai integral fungsi real tertentu.

Kata Kunci: *Analitik, lintasan tertutup sederhana, singular, residu*

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Residu merupakan salah satu koefisien deret Laurent yang dapat digunakan untuk menghitung integral

$$\oint_C f(z)\, dz$$

yaitu integral kontur sepanjang atau di sekeliling lintasan tertutup sederhana C. Dikatakan lintasan tertutup sederhana (*simple closed path*), jika titik akhir lintasan C berhimpit dengan titik awalnya dan lintasan tersebut tidak memotong dirinya sendiri kecuali mungkin titik awal dan titik akhirnya.

Jika $f(z)$ analitik dimana-mana sepanjang C dan di bagian dalam C, menurut integral Cauchy nilai integral itu akan nol, dan selesailah sudah perhitungannya. Jika $f(z)$ analitik di $z = z_0$ di bagian dalam C yang merupakan titik kesingularan, maka $f(z)$ mempunyai deret Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots$$

di dalam suatu domain yang berbentuk $0 < |z - z_0| < R$ koefisien a_n dan b_n di berikan oleh rumus integral

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz \qquad , n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C (z - z_0)^{n-1} f(z)\, dz \qquad , n = 1, 2, 3, \cdots$$

di antara koefisien b_n khusus untuk n = 1, dirumuskan oleh:

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\ dz$$

namun, karena deret Laurent dapat diperoleh melalui berbagai cara, tanpa menggunakan rumus integral untuk koefisien-koefisiennya, maka rumus integral untuk b_1 tersebut dapat digunakan untuk menghitung integral kompleks

$$\oint_C f(z)\ dz = 2\pi i\ b_1$$

pengintegralan dalam arah berlawanan jarum jam sepanjang lintasan tertutup sederhana C yang mengandung $z = z_0$ di dalam interiornya.

Koefisien b_1 dinamakan residu fungsi $f(z)$ di $z = z_0$ dan dilambangkan dengan

$$b_1 = \underset{z=z_0}{\operatorname{Res}}\ f(z)$$

Untuk memperoleh residu, ada cara lain yang lebih efisien dan lebih sederhana tanpa menurunkan seluruh deret Laurent tersebut yaitu dengan menggunakan hitung residu atau rumus residu di kutub. Sehingga dalam kaitan dengan ini tidak perlu lagi mencari seluruh deret itu, dan mengambil koefisien $\frac{1}{z - z_0}$ sebagai residunya.

Rumus untuk b_1 dapat membantu dalam menyelesaikan perhitungan integral kompleks lintasan tertutup tunggal, selain itu residu dari fungsi kompleks memegang peranan penting dalam perhitungan integral fungsi real dengan menggunakan teorema dasar yang dikenal dengan teorema residu yang menghasilkan suatu cara sederhana namun elegan untuk menghitung integral real tertentu.

BAB IV
PENUTUP

Residu dapat diperoleh melalui berbagai cara diantaranya adalah dengan menurunkan beberapa rumus residu di kutub. Rumus residu ini sangat membantu dalam perhitungan integral kompleks, sehingga dalam menyelesaikan integralnya tidak perlu lagi mencari deret Laurent dan mengambil koefisien $\frac{1}{z-z_0}$ sebagai residunya.

Teorema residu adalah perluasan dari residu yang menyatakan bahwa

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z)$$

penjumlahan hanya untuk z_j yang terletak di bagian dalam C.

Pengintegralan residu melibatkan kurva tertutup, dengan mengambil $z = e^{it}$, selang pengintegralan real $0 \le t \le 2\pi$ dapat ditransformasikan menjadi lingkaran satuan, sehingga pengintegralan residu dapat menyelesaikan integral fungsi real yang berbentuk

$$\int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t)\,dt$$

dengan f adalah fungsi rasiaonal dari cos t dan sin t. Cara lain menghitung integral fungsi real dengan residu adalah penggunaan selang tertutup yang terdiri atas selang $-R \le x \le R$ pada sumbu real dan setengah lingkaran $|z| = r$. Berdasarkan teorema residu, jika $R \to \infty$, maka diperoleh untuk fungsi rasional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ (dengan $q(x) \ne 0$ dan derajat $q \ge$ derajat $p+2$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f(z)$$

penjumlahan adalah untuk semua residu di kutub yang berada di dalam separuh bidang bagian atas.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Churchill, Ruel V and James Ward Brown. 1990. *Complex Variables and Applications. 5-th edition.* Mc Graw-Hill Publishing Company, Ney York

[2] Kreyzig, Erwin. Alih Bahasa: Ir. Bambang Sumantri. 1993. *Matematika Teknik Lanjutan.* PT. Gramedia Pustaka Utama, Jakarta

[3] Lang, Serge. 1992. *Compleks Analysis.* Springer Verlag, New York

[4] Martono, Koko. 1999. *Sari Informasi Fungsi Kompleks.* HIPMA-ITB, Bandung

[5] O'Neil V, Peter. 1985. *Advanced Engineering Mathematics, third edition.* Wadsworth Publishing Company, California

[6] Poliouras, Johan D. Alih Bahasa: Drs. Wibisono Gunawan. 1987. *Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur.* Erlangga, Jakarta

[7] Ruwanto, Bambang. 2003. *Matematika untuk Fisika dan Teknik 2.* Adicita Karya Nusa, Yogyakarta

[8] Soemantri, R. 1994. *Fungsi Variabel Kompleks.* ITB, Bandung