

**PENDEKATAN KRONECKER *PRODUCT* PADA MODEL RANCANGAN
DUA-ARAH**

SKRIPSI SARJANA MATEMATIKA

OLEH :

**ZIKRA
04 934 027**



JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS ANDALAS

PADANG

2009

ABSTRAK

Misalkan $Y = X\beta + \varepsilon$ adalah model linier, dimana Y adalah vektor dari n pengamatan, β adalah vektor dari parameter, ε adalah komponen galat atau sisaan dan X adalah model matriks $n \times p$. Model linier ini dapat diterapkan pada analisis ragam khususnya pada rancangan dua arah. Dalam hal ini, kronecker *product* berperan dalam menyederhanakan bentuk matriks pada rancangan dua arah yang mana dinotasikan dengan bentuk \otimes .

Kata kunci ; matriks, model linier, analisis ragam klasifikasi dua arah, varians-kovarians, kronecker *product*.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Model statistika linier memainkan peranan penting dalam teori statistik. Teori model linier merupakan teori dasar untuk berbagai teknik statistika yang penting seperti analisis regresi, analisis ragam, analisis peragam, rancangan percobaan dan banyak lainnya.[5]

Diasumsikan bahwa bentuk umum dari model linier adalah

$$y = X\beta + \varepsilon \quad \dots\dots\dots (1.1.1)$$

Dengan notasi, dapat dinyatakan

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{r1} & x_{r2} & \dots & x_{rp} \end{bmatrix}, \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_r \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (1.1.2)$$

dimana y adalah vektor dari r pengamatan, β adalah vektor dari parameter, ε adalah vektor dari galat acak dan X adalah model matriks.

Kronecker *product* adalah suatu operasi pada dua matriks acak yang dihasilkan dalam ukuran blok matriks, yang mana kronecker *product* dilambangkan dengan \otimes . Kronecker *product* banyak dipergunakan dalam teori model linier, diantaranya dalam model rancangan satu-arah, model rancangan dua-arah dan sebagainya. Kronecker *product* berperan menyederhanakan bentuk matriks.[9]

Berdasarkan uraian, penulis akan membahas masalah kronecker *product*. Dalam hal ini, kronecker *product* digunakan dalam model linier khususnya pada model rancangan dua-arah.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah, maka persoalan yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah bagaimana menentukan model rancangan dua-arah pada teori model linier dengan pendekatan kronecker *product*.

1.3 Pembatasan Masalah

Pada tulisan ini, masalah dibatasi untuk model rancangan dua-arah dengan menggunakan pendekatan kronecker *product* khususnya pada model acak.

1.4 Tujuan penulisan

Adapun tujuan dari penulisan ini adalah menentukan bentuk model rancangan dua-arah dengan menggunakan pendekatan kronecker *product*.

1.5 Sistematika Penulisan

Bahan tugas akhir ini ditulis dalam bentuk sistematika penulisan sebagai berikut:

BAB I : Pendahuluan

Pada bab ini dibahas tentang latar belakang, perumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penulisan dan sistematika penulisan.

BAB II : Landasan Teori

Pada bab ini diberikan teori-teori yang menunjang pembahasan masalah yang meliputi teori matriks, invers matriks, vektor dari variabel acak, model linier, analisis ragam klasifikasi dua-arah

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Analisis ragam terdiri dari dua jenis klasifikasi pengamatan, yaitu klasifikasi satu-arah dan klasifikasi dua-arah. Dalam hal ini, kronecker *product* berfungsi dalam menyederhanakan bentuk matriks pada model acak rancangan dua-arah.

Rancangan klasifikasi dua-arah ini, ada yang dipengaruhi oleh interaksi dan ada juga tanpa dipengaruhi oleh interaksi. Dalam hal ini, akan simpulkan bentuk umum dari model acak tanpa interaksi dan dengan interaksi dengan menggunakan pendekatan kronecker *product*, yaitu:

1. Pendekatan kronecker *product* pada model acak rancangan dua arah tanpa interaksi.

a. Bentuk umum dari model : $y = 1_a \mu + (I_a \otimes 1_b) \alpha + (1_a \otimes I_b) \beta + \varepsilon$

b. Bentuk umum dari varians : $\text{var}(y) = (I_a \otimes J_b) \sigma_\alpha^2 + (J_a \otimes I_b) \sigma_\beta^2 + I \sigma^2$

c. Bentuk umum dari jumlah kuadrat bagi nilai tengah baris:

$$JK(\alpha) = y' \left(\frac{1}{b} (I_a \otimes J_b) - \frac{1}{ab} (J_a \otimes J_b) \right) y$$

d. Bentuk umum dari jumlah kuadrat bagi nilai tengah kolom :

$$JK(\beta) = y' \left(\frac{1}{a} (J_a \otimes I_b) - \frac{1}{ab} (J_a \otimes J_b) \right) y$$

e. Bentuk umum dari jumlah kuadrat bagi galat :

$$JK(S) = y' \left((I_a \otimes I_b) - \frac{1}{b} (I_a \otimes J_b) - \frac{1}{a} (J_a \otimes I_b) + \frac{1}{ab} (J_a \otimes J_b) \right) y$$

2. Pendekatan kronecker *product* pada model acak rancangan dua arah dengan interaksi.

- a. Bentuk umum dari model :

$$y = 1_a \mu + [(I_a \otimes 1_b) \otimes 1_c] \alpha + [(1_a \otimes I_b) \otimes 1_c] \beta + [(I_a \otimes I_b) \otimes 1_c] (\alpha\beta) + \varepsilon$$

- b. Bentuk umum dari varians :

$$\text{var}(y) = [(I_a \otimes J_b) \otimes J_c] \sigma_\alpha^2 + [(J_a \otimes I_b) \otimes J_c] \sigma_\beta^2 + [(I_a \otimes I_b) \otimes J_c] \sigma_{\alpha\beta}^2 + I \sigma^2$$

- c. Bentuk umum dari jumlah kuadrat bagi nilai tengah baris:

$$JK(\alpha) = y^T \left(\frac{1}{bc} [(I_a \otimes J_b) \otimes J_c] - \frac{1}{abc} [(J_a \otimes J_b) \otimes J_c] \right) y$$

- d. Bentuk umum dari jumlah kuadrat bagi nilai tengah kolom :

$$JK(\beta) = y^T \left(\frac{1}{ac} [(J_a \otimes I_b) \otimes J_c] - \frac{1}{abc} [(J_a \otimes J_b) \otimes J_c] \right) y$$

- e. Bentuk umum dari jumlah kuadrat bagi galat :

$$JK(S) = y^T \left([(J_a \otimes I_b) \otimes I_c] - \frac{1}{c} [(J_a \otimes I_b) \otimes J_c] \right) y$$

- f. Bentuk umum dari jumlah kuadrat bagi interaksi :

$$JK(BK) = y^T \left(\frac{1}{c} [(J_a \otimes I_b) \otimes J_c] - \frac{1}{bc} [(J_a \otimes J_b) \otimes J_c] - \frac{1}{ac} [(J_a \otimes I_b) \otimes J_c] + \frac{1}{abc} [(J_a \otimes J_b) \otimes J_c] \right) y$$

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Anton, Howard.1987. *Aljabar Linier Elementer, Edisi ke-5*. Erlangga, Jakarta
- [2] Cambell, H.G. 1980. *Linier Algebra With Application, Second edition*. Prentice Hall, Inc, Englewood Chifts, New Jersey
- [3] Jacob, Bill. 1990. *Linier Algebra*. W. H. Freeman and Company, USA
- [4] Kshirsagar, Anant M. 1983. *A Course In Linier Model*. Marcel Dekker, Inc, USA
- [5] Leon, S. J. *Aljabar Linier dan Aplikasinya (terjemahan) fifth edition*. Erlangga, Jakarta
- [6] Myers, H. Raymond and J. S. Milton. 1991. *A First Course in The Theory of Linier Statistical Models*. PWS-KENT Publishing Company, Boston
- [7] Noble, Ben and Daniel, J.W. 1998. *Applied Linier Algebra 3th Edition*. Prentice-Hall, New Jersey
- [8] Usman, Mustofa,Ph.D dan Warsono, Ph.D. 1997. *Bahan Pelatihan Penguasaan Teori Statistika dan Model Linier*. Jurusan Matematika-FMIPA Universitas Lampung dan Proyek Heds
- [9] Walpole, Ronald E. 1982. *Pengantar Statistika Edisi ke-3*. PT. Gramedia Pustaka Utama, Jakarta