

**PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL HOMOGEN DENGAN
MENGUNAKAN METODE DERET KUASA**

Skripsi Strata-1 Jurusan Matematika

YULIMAN HATORANGAN SIREGAR

(04 134 033)



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS**

PADANG

2009

ABSTRAK

Suatu deret dengan bentuk $a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$ disebut deret kuasa dalam kuasa $(x - x_0)$ dan dinyatakan dengan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ dengan $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ adalah koefisien dari deret kuasa dan titik x_0 adalah pusat dari deret kuasa. Dalam tulisan ini ditentukan penyelesaian persamaan diferensial homogen orde dua dengan menggunakan metode deret kuasa baik penyelesaian yang berada pada titik biasa maupun pada titik singular yang regular. Dalam menentukan penyelesaian tersebut, ada beberapa teorema yang harus digunakan dengan baik sekaligus memperhatikan terlebih dahulu beberapa kasus yang ada dan memilih kasus yang tepat dengan persamaan diferensial yang akan ditentukan penyelesaiannya.

Kata Kunci : *Deret Kuasa, Persamaan Diferensial Homogen, Titik Biasa dan Titik Singular*

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ilmu matematika pada saat ini sangatlah berkembang. Ini dapat dilihat banyaknya penerapan-penerapan ilmu matematika yang telah digunakan dalam berbagai bidang terutama dalam bidang fisika dan teknik. Penerapan-penerapan ini semakin hari semakin luas seiring dengan perkembangan bidang-bidang ilmu matematika. Jadi tidak heran lagi kalau buku acuan tentang penerapan itu sendiri sudah banyak ditemukan.

Setiap bentuk penerapan matematika yang telah dimodelkan akan sangat berguna dalam kehidupan nyata dan tentunya model-model matematika ini bukanlah sekadar karangan tetapi model-model ini telah diproses oleh para ahli matematika secara ilmiah.

Persamaan diferensial biasa sangat berguna dan berarti karena persamaan ini banyak digunakan dalam penerapan. Oleh karena itu telah ditemukan metode-metode baru dalam menyelesaikan persamaan diferensial biasa sehingga akan menambah dan memperluas ilmu matematika itu sendiri.

Persamaan diferensial linier homogen yang koefisiennya konstanta dapat diselesaikan melalui metode aljabar, dan solusinya dapat berupa fungsi yang bentuknya telah dikenal. Akan tetapi, kalau koefisien-koefisiennya itu bukan konstanta namun bergantung pada x , situasinya akan lebih rumit dan solusinya mungkin lebih rumit juga. Karena persamaan diferensial dengan koefisien bergantung x ini penting dalam matematika rekayasa maka perlu dibahas sebuah metode untuk menyelesaikan persamaan-persamaan ini. Solusinya akan dihasilkan

dalam bentuk deret kuasa. Karena alasan inilah maka metode ini disebut metode deret kuasa.

1.2 Pembatasan Masalah

Pembatasan masalah pada tugas akhir ini adalah menentukan penyelesaian persamaan diferensial homogen orde dua dengan koefisien peubah dan diselesaikan dengan menggunakan metode deret kuasa baik yang berada di sekitar titik biasa maupun yang berada di sekitar titik singular yang regular.

1.3 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan ini adalah untuk mengetahui bagaimana menentukan penyelesaian persamaan diferensial homogen orde dua dengan menggunakan metode deret kuasa baik yang berada di sekitar titik biasa maupun yang berada di sekitar titik singular yang regular.

1.4 Sistematika Penulisan

Tugas akhir ini terdiri dari 4 bab, yaitu :

Bab I : Pendahuluan

Bab ini berisikan latar belakang, pembatasan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan.

Bab II : Landasan Teori

Bab ini berisikan teori-teori dasar yang mendukung penulisan tugas akhir ini.

Bab III : Pembahasan

Bab ini berisikan tentang penentuan penyelesaian persamaan diferensial homogen orde dua dengan menggunakan metode deret kuasa baik yang

BAB IV

PENUTUP

Kesimpulan

Dari pembahasan yang telah ditunjukkan dalam bab III, maka dapat disimpulkan bahwa ada dua jenis penyelesaian umum persamaan diferensial linier orde dua dengan menggunakan metode deret kuasa, yaitu :

1. Penyelesaian di sekitar titik biasa

Jika x_0 sebuah titik biasa dari suatu persamaan diferensial, maka penyelesaian umum persamaan diferensial itu mempunyai suatu uraian deret kuasa di sekitar x_0

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

dengan jari-jari kekonvergenan yang positif. Jika R_1 dan R_2 jari-jari kekonvergenan deret

$$\frac{a_1(x)}{a_2(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (x - x_0)^n \text{ untuk } |x - x_0| < R_1$$

dan

$$\frac{a_0(x)}{a_2(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (x - x_0)^n \text{ untuk } |x - x_0| < R_2$$

maka jari-jari kekonvergenan dari penyelesaian umum persamaan diferensial itu sekurang-kurangnya sama dengan minimum dari R_1 dan R_2 .

2. Penyelesaian di sekitar titik singular yang regular

Misalkan x_0 sebuah titik singular yang regular dari suatu persamaan diferensial dan misalkan bahwa uraian deret kuasa

$$(x-x_0) \frac{a_1(x)}{a_2(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (x-x_0)^n \text{ untuk } |x-x_0| < R_1$$

dan

$$(x-x_0)^2 \frac{a_0(x)}{a_2(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (x-x_0)^n \text{ untuk } |x-x_0| < R_2,$$

berlaku. Misalkan pula bahwa λ_1 dan λ_2 dua akar dari persamaan indeks

$$\lambda^2 + (A_0 - 1)\lambda + B_0 = 0,$$

yang ditandai sedemikian sehingga $\lambda_1 \geq \lambda_2$, dalam hal ini kedua akar tersebut merupakan bilangan riil, maka salah satu penyelesaian dari persamaan diferensial itu berbentuk

$$y_1(x) = |x-x_0|^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n,$$

dengan $a_0 = 1$ dan berlaku di dalam selang tanpa pusat $0 < |x-x_0| < R$ dimana $R = \min\{R_1, R_2\}$. Suatu penyelesaian kedua yang bebas linier $y_2(x)$ dari persamaan diferensial itu diperoleh sebagai berikut :

Kasus 1

Jika $\lambda_1 - \lambda_2 \neq$ bilangan bulat, maka

$$y_2(x) = |x-x_0|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n,$$

dengan $b_0 = 1$.

Kasus 2

Jika $\lambda_1 = \lambda_2$, maka

$$y_2(x) = y_1(x) \ln|x-x_0| + |x-x_0|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$$

dengan $b_0 = 1$.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Boyce, William E, Richard C. 2000. *Elementary Differential Equation And Boundary value Problems*. Van Hoffmann Press, USA
- [2] Farrow, Sanley J. 1994. *An Introduction To Differential Equations And Their Applications*. Mc Brow-Hill. Inc, USA
- [3] Finizio, N, G. Ladas. 1998. *Persamaan Diferensial Biasa derngan Penerapan Modren. Edisi Kedua*. Erlangga. Jakarta
- 4] Giordano, Weir. 1991. *Differential Equation : A Modelling Approach*. Addison-Wesley Publishing Company. Ins, USA
- [5] Humi, Mayer, William B. Miller. 1992. *Boundary Value Problems And Partial Differential Equations*. Boston
- [6] Jeffrey, Allan. 1993. *Linier Algebra And Ordinary* . CRC Press, USA
- [7] Manogian, Manoug N, Robert A Northcutt. 1973. *Ordinary Differential Equations An Introduction*. Columbus, Ohio

MILIK
UPT PERPUSTAKAAN
UNIVERSITAS ANDALAS